

## LISTA POWTÓRKOWA 1: INDUKCJA MATEMATYCZNA

1. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$8n \leq 2^n + 16.$$

2. Dowiedź, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1}.$$

3. Dowiedź, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzą nierówności:

$$(n + 3) \cdot \binom{2n}{n} > 4^n, \quad \sum_{i=1}^n i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6}.$$

4. W miejsce kropek wstaw jeden ze znaków  $\geq$ ,  $\leq$ , a następnie dowiedź, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$(n + 2) \cdot \binom{2n}{n} \dots\dots\dots 3 \cdot 2^{2n-1}.$$

5. Przy każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

**P** - jest Prawdą (tzn. musi być prawdziwe)

**F** - jest Fałszem (tzn. musi być fałszywe)

**N** - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. Nie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe).

O zdaniu  $T(n)$  wiadomo, że

- $T(1)$  jest prawdziwe,
- dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzi implikacja  $T(n) \implies T(n + 10)$ ,
- implikacja  $T(66) \implies T(77)$  jest fałszywa.

Wówczas:

- |                   |                                   |                                   |
|-------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| (a) $T(37)$ ..... | (d) $T(86)$ .....                 | (g) $T(10) \implies T(106)$ ..... |
| (b) $T(51)$ ..... | (e) $T(97)$ .....                 | (h) $T(16) \implies T(108)$ ..... |
| (c) $T(72)$ ..... | (f) $T(10) \implies T(100)$ ..... | (i) $T(17) \implies T(109)$ ..... |

6. O zdaniu  $T(n)$  wiadomo, że

- $T(1)$  jest prawdziwe,
- dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzi implikacja  $T(n) \implies T(n + 2)$ ,
- implikacja  $T(102) \implies T(100)$  jest fałszywa.

Które zdania  $T(n)$  są prawdziwe, które fałszywe, a dla których prawdziwości nie możemy stwierdzić?

7. Dowiedź, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$2^n \cdot \binom{2n}{n} > 3 \cdot 7^{n-1}.$$

8. Dane są klocki o kształcie sześcianu o wymiarach  $2 \times 2 \times 2$  z usuniętym narożnikiem  $1 \times 1 \times 1$ . Używając tych klocków zbuduj sześcian o wymiarach  $2^n \times 2^n \times 2^n$  z usuniętym narożnikiem  $1 \times 1 \times 1$ .